2. PROCESOS ESTOCÁSTICOS VECTORIALES.

2.1 DEFINICIONES

- Se usarán procesos estocásticos como modelos matemáticos para las perturbaciones y ruidos.
- Un proceso estocástico es como una familia de funciones temporales.

Supongamos que:

$\upsilon_1(t), \upsilon_2(t), \ldots\ldots \upsilon_n(t)$ son n procesos estocásticos escalares.

Entonces:

$\upsilon(t) = [\upsilon_1(t), \upsilon_2(t), \ldots\ldots \upsilon_n(t)]^T$ es un proceso estocástico vectorial.

Un proceso estocástico se puede caracterizar especificando la distribución de probabilidad conjunta:

$$P\{\, \upsilon(t_1) \leq \upsilon_1, \upsilon(t_2) \leq \upsilon_2, \ldots\ldots, \upsilon(t_m) \leq \upsilon_m \}$$

Para todo real $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots\ldots, \upsilon_m$ y para todo $t_1, t_2, \ldots\ldots, t_m \geq t_o$ y para cada número entero m.

Aquí el vector desigualdad $\upsilon(t_i) \leq \upsilon_i$, se satisface si las desigualdades:

$$\upsilon_j(t_i) \leq \upsilon_{ij} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

son simultáneamente satisfechas.

Los υ_{ij} son los componentes de υ_i, es decir, $\upsilon_i = [\upsilon_{i1}, \upsilon_{i2}, \ldots, \upsilon_{in}]^T$

Definición 2.1

Un proceso estocástico v(t) es estacionario si:

$$P\{\upsilon(t_1) \leq \upsilon_1, \ldots\ldots, \upsilon(t_m) \leq \upsilon_m\} = P\{\, \upsilon(t_1 + \theta) \leq \upsilon_1, \ldots\ldots, \upsilon(t_m + \theta) \leq \upsilon_m \}$$

para todo $t_1, t_2, \ldots, t_m$ y para todo $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_m$, para cada número entero m y para todo θ.

Definición 2.2

Considerar el proceso estocástico vectorial valuado $v(t)$. Entonces definimos:

$m(t) = \mathcal{E}\{ v(t) \}$ *como la media del proceso*

$\mathcal{R}_v(t_1, t_2) = \mathcal{E}\{ [v(t_1) - m(t_1)][v(t_2) - m(t_2)]^T \}$ *como la matriz covarianza*

$C_v(t_1, t_2) = \mathcal{E}\{v(t_1)\, v^T(t_2)\}$ *como la matriz momento conjunta de segundo orden de $v(t)$.*

$\mathcal{R}_v(t, t) = Q(t)$ *se denomina matriz varianza*

$C_v(t, t) = Q'(t)$ *se denomina matriz momento de segundo orden de $v(t)$*

Teorema 2.1 *La matriz covarianza $\mathcal{R}_v(t_1, t_2)$ y la matriz momento conjunta de segundo orden $C_v(t_1, t_2)$ de un proceso estocástico vectorial valuado $v(t)$ tiene las siguientes propiedades:*

a) $\mathcal{R}_v(t_2, t_1) = \mathcal{R}_v^T(t_1, t_2)$ *para todo t_1, t_2*
$C_v(t_2, t_1) = C_v^T(t_1, t_2)$ *para todo t_1, t_2*

b) $Q(t) = \mathcal{R}(t, t) \geq 0$ *para todo t*
$Q'(t) = C(t, t) \geq 0$ *para todo t*

c) $C_v(t_1, t_2) = \mathcal{R}_v(t_1, t_2) + m(t_1)\, m^T(t_2)$ *para todo t_1, t_2*
donde $m(t)$ es la media del proceso.

La anotación $M \geq 0$, donde M es una matriz real cuadrada y simétrica, significa que M está definida no-negativa, es decir:

$$x^T M x \geq 0 \quad \text{para todo real } x$$

Teorema 2.2 *Suponga que $v(t)$ es un proceso estocástico estacionario. Entonces su media $m(t)$ es constante y su matriz covarianza $\mathcal{R}_v(t_1, t_2)$ depende de $(t_1 - t_2)$ solamente.*

Definición 2.3 *El proceso estocástico $v(t)$ se denomina estacionario en el sentido amplio si su matriz de momento de segundo orden $C_v(t, t)$ es finita para todo t, su media $m(t)$ es constante, y su matriz covarianza $\mathcal{R}_v(t_1, t_2)$ depende de $(t_1 - t_2)$ solamente.*

Observación:

Dos procesos son no correlacionados si $R_v(t_1, t_2) = 0$