

Capítulo 2

Procesos estocásticos vectoriales

2.1. Definiciones

Más adelante usaremos procesos estocásticos como modelos matemáticos para las perturbaciones y ruidos. A menudo varias perturbaciones y fenómenos de ruido simultáneos influyen en un sistema dado. Esto hace necesario introducir procesos estocásticos vectoriales valuados (o valorados).

Un proceso estocástico es como una familia de funciones temporales. Cada función la llamaremos: una realización del proceso. Supongamos que $\nu_1(t), \nu_2(t), \dots, \nu_n(t)$ son n procesos estocásticos escalares que pueden ser mutuamente dependientes.

Entonces llamaremos a:

$$v(t) = [\nu_1(t), \nu_2(t), \dots, \nu_n(t)]^T \quad (2.1)$$

un proceso estocástico vectorial.

Supondremos que cada componente de $v(t)$ toma valores reales y que $t \geq t_0$ con t_0 dado.

Un proceso estocástico se puede caracterizar especificando la distribución de probabilidad conjunta:

$$P\{v(t_1) \leq v_1, v(t_2) \leq v_2, \dots, v(t_m) \leq v_m\} \quad (2.2)$$

para todo real v_1, v_2, \dots, v_m , para todo $t_1, t_2, \dots, t_m \geq t_0$ y para cada número entero m . Aquí el vector desigualdad $v(t_i) \leq v_i$ se satisface si las desigualdades:

$$\nu_j(t_i) \leq v_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

son simultáneamente satisfechas.

Los ν_{ij} son los componentes de v_i , es decir,

$$v_i = [\nu_{i1}, \nu_{i2}, \dots, \nu_{in}]^T$$

Una clase especial de procesos estocásticos son aquellos cuyas propiedades estadísticas no cambian con el tiempo.

Definición 2.1. Un proceso estocástico $v(t)$ es estacionario si:

$$P\{v(t_1) \leq v_1, \dots, v(t_m) \leq v_m\} = P\{v(t_1 + \theta) \leq v_1, \dots, v(t_m + \theta) \leq v_m\} \quad (2.4)$$

para todo t_1, t_2, \dots, t_m , para todo v_1, v_2, \dots, v_m , para cada número entero m y para todo θ .

En muchos casos, se consideran solamente las propiedades de primer y segundo orden de un proceso estocástico. Denominadas valor medio y matriz covarianza, pero definiremos otras propiedades que serán usadas más adelante.

Definición 2.2. Considerar el proceso estocástico vectorial valuado $v(t)$. Entonces definimos:

$$m(t) = E\{v(t)\} \quad (2.5)$$

como la medida del proceso,

$$R_v(t_1, t_2) = E\{[v(t_1) - m(t_1)][v(t_2) - m(t_2)]^T\} \quad (2.6)$$

como la matriz covarianza, y

$$C_v(t_1, t_2) = E\{v(t_1) v^T(t_2)\} \quad (2.7)$$

como matriz momento conjunta de segundo orden de $v(t)$.

$$R_v(t, t) = Q(t) \quad \text{se denomina matriz varianza} \quad (2.8)$$

$$C_v(t, t) = Q'(t) \quad \text{se denomina matriz momento de segundo orden de } v(t) \quad (2.9)$$

Observación: Cuando el proceso tiene $m(t) = 0$ entonces:

$$C_v(t_1, t_2) = R_v(t_1, t_2) \quad (2.10)$$

Teorema 2.1. La matriz covarianza $R_v(t_1, t_2)$ y la matriz momento conjunta de segundo orden $C_v(t_1, t_2)$ de un proceso estocástico vectorial valuado $v(t)$ tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \text{a.)} \quad R_v(t_2, t_1) &= R_v^T(t_1, t_2) \quad \forall t_1, t_2 \quad \text{y} \\ C_v(t_2, t_1) &= C_v^T(t_1, t_2) \quad \forall t_1, t_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \text{b.)} \quad Q(t) &= R_v(t, t) \geq 0 \quad \forall t \quad \text{y} \\ Q'(t) &= C_v(t, t) \geq 0 \quad \forall t \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \text{c.)} \quad C_v(t_1, t_2) &= R_v(t_1, t_2) + m(t_1) m^T(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \\ &\text{donde } m(t) \text{ es la media del proceso.} \end{aligned} \quad (2.13)$$

La anotación $M \geq 0$, donde M es una matriz real cuadrada y simétrica, significa que M está definida no-negativa, es decir:

$$x^T M x \geq 0 \quad \forall \text{ real } x \quad (2.14)$$

Teorema 2.2. *Suponga que $v(t)$ es un proceso estocástico estacionario. Entonces su media $m(t)$ es constante y su matriz covarianza $R_v(t_1, t_2)$ depende de $(t_1 - t_2)$ solamente.*

Definición 2.3. *El proceso estocástico $v(t)$ es denominado estacionario en el sentido amplio si su matriz de momento de segundo orden $C_v(t, t)$ es finita para todo t , su media $m(t)$ es constante, y su matriz covarianza $R_v(t_1, t_2)$ depende de $(t_1 - t_2)$ solamente.*

Observación: Dos procesos estocásticos son no correlacionados si:

$$E\{[v_1(t_1) - m_1(t_1)][v_2(t_2) - m_2(t_2)]^T\} = 0 \quad \forall t_1, t_2 \quad (2.15)$$

2.2. Matrices de densidad espectral de potencia

Para procesos estocásticos escalares estacionarios en el sentido amplio, la función de densidad espectral de potencia es la transformada de Fourier de la función covarianza.

De la misma manera se define para un proceso estocástico vectorial:

Definición 2.4. *La matriz de densidad espectral de potencia $\Sigma_v(\omega)$ de un proceso estocástico vectorial estacionario en el sentido amplio se define como la transformada de Fourier, si existe, de la matriz covarianza $R_v(t_1, t_2)$ del proceso, es decir,*

$$\Sigma_v(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} R_v(\tau) d\tau \quad (2.16)$$

considerando $\tau = (t_1 - t_2)$

Las propiedades de esta matriz se resumen en el siguiente teorema:

Teorema 2.3. *Suponga que $\Sigma_v(\omega)$ es la matriz de densidad espectral de un proceso estocástico vectorial estacionario en el sentido amplio $v(t)$. Entonces $\Sigma_v(\omega)$ es una matriz compleja que tiene las siguientes propiedades:*

$$a.) \quad \Sigma_v(-\omega) = \Sigma_v^T(\omega) \quad \forall \omega \quad (2.17)$$

$$b.) \quad \Sigma_v^*(\omega) = \Sigma_v(\omega) \quad \forall \omega \quad (2.18)$$

$$c.) \quad \Sigma_v(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \quad (2.19)$$

El asterisco indica transpuesta conjugada compleja, mientras que $M \geq 0$ donde M es una matriz compleja, indica que M es una matriz definida no negativa, es decir,

$$x^* M x \geq 0 \quad \forall x \text{ complejo} \quad (2.20)$$

2.3. Respuesta de sistemas lineales a entradas estocásticas

Las propiedades estadísticas de la respuesta se pueden obtener a través de los siguientes teoremas:

Teorema 2.4. *Considere un sistema lineal con matriz respuesta a impulso $K(t, \tau)$ que en el instante t_0 está en el estado cero. Suponga que la entrada al sistema es una realización de un proceso estocástico $v(t)$ con media $m_u(t)$ y matriz covarianza $R_u(t_1, t_2)$.*

Entonces la salida del sistema es una realización de un proceso estocástico $y(t)$ con media:

$$m_y(t) = \int_{t_0}^t K(t, \tau) m_u(\tau) d\tau \quad (2.21)$$

y matriz covarianza:

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{t_0}^{t_2} K(t_1, \tau_1) R_u(\tau_1, \tau_2) K^T(t_2, \tau_2) d\tau_2 \right\} d\tau_1 \quad (2.22)$$

bajo la condición de que las integrales existan.

Teorema 2.5. *Supongamos que el sistema lineal del teorema 2.4 es un sistema, invariante en el tiempo asintóticamente estable, con matriz respuesta impulso $K(t-\tau)$ y que el proceso estocástico de entrada $u(t)$ es estacionario en el sentido amplio con matriz covarianza $R_u(t_1 - t_2)$.*

Entonces si la entrada al sistema es una realización del proceso $u(t)$, la cual se aplica desde el instante $-\infty$, la salida $y(t)$ es una realización de un proceso estocástico estacionario en el sentido amplio, con matriz de covarianza:

$$R_y(t_1 - t_2) = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty K(\tau_1) R_u(t_1 - t_2 + \tau_2 - \tau_1) K^T(\tau_2) d\tau_2 \right\} d\tau_1 \quad (2.23)$$

La matriz densidad espectral de potencia para un proceso estacionario en el sentido amplio se puede determinar con el siguiente teorema.

Teorema 2.6. *Considere un sistema lineal invariante en el tiempo asintóticamente estable con matriz de transferencia $H(s)$.*

Suponga que la entrada es una realización de un proceso estocástico estacionario en el sentido amplio $u(t)$ con la matriz de densidad $\Sigma_u(\omega)$ que se aplica desde el instante $-\infty$.

Entonces la salida $y(t)$ es una realización de un proceso estocástico estacionario en el sentido amplio con una matriz densidad de potencia:

$$\Sigma_y(\omega) = H(j\omega) \Sigma_u(\omega) H^T(-j\omega) \quad (2.24)$$

Considerando que $H(s)$ es la transformada de Laplace de $K(\tau)$.

2.4. Expresiones cuadráticas

Más adelante usaremos el valor cuadrático medio de un proceso estocástico. Usaremos la expresión cuadrática de la forma:

$$E \{v^T(t) W(t) v(t)\} \quad (2.25)$$

donde $W(t)$ es una matriz de peso simétrica.

Si $v(t) = \text{Columna} [\nu_1(t), \dots, \nu_n(t)]$ y W tiene los elementos W_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$. Entonces (2.25) se puede escribir como:

$$E \{v^T(t) W(t) v(t)\} = E \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \nu_i(t) W_{ij}(t) \nu_j(t) \right\} \quad (2.26)$$

Usualmente se escoge $W(t)$ definida no negativa para que la expresión tome valores positivos solamente.

El siguiente teorema permite relacionar esta definición con propiedades estadísticas de un proceso:

Teorema 2.7. *Sea $v(t)$ un proceso estocástico vectorial valuado.*

Entonces si $W(t)$ es una matriz simétrica:

$$E \{v^T(t) W(t) v(t)\} = \text{tr} [W(t) C_v(t, t)] \quad (2.27)$$

donde $C_v(t_1, t_2)$ es la matriz momento conjunta de segundo orden de $v(t)$. Si $v(t)$ es estacionaria en el sentido amplio, con media cero y matriz covarianza $R_v(t_1 - t_2)$ y W es constante:

$$E \{v^T(t) W v(t)\} = \text{tr} [W R_v(0)] \quad (2.28)$$

Si $v(t)$ tiene media cero y la matriz densidad espectral de potencia $\Sigma_v(\omega)$, entonces:

$$E \{v^T(t) W v(t)\} = \text{tr} \left[\int_{-\infty}^{\infty} W \Sigma_v(\omega) df \right] \quad (2.29)$$

donde

$$\omega = 2\pi f \quad (2.30)$$

Además

$$R_v(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Sigma_v(\omega) df \quad (2.31)$$

Observación:

$\text{tr}(A)$ es la traza de A , es decir,

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} \quad (2.32)$$

donde α_{ii} , $i = 1, 2, \dots, n$ son los elementos de la diagonal de la matriz A .